

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS.** Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración = 60 minutos

1) [20 ptos]

a) [10 ptos] Calcule $\sum_{k=2}^{100} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} + \left(\frac{1}{2} \right)^k \right)$

b) [10 ptos] Sean x, y, z tres números en progresión aritmética tales que su suma es 24. Se pide determinar los números x, y, z que cumplen que si restamos 1 al primer número, 2 al segundo número y al tercero número se deja igual, los nuevos números quedan en progresión geométrica.

2) [20 ptos] En el desarrollo de $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4} \right)^n$. Encuentre

a) [8 ptos] para $n = 12$, el coeficiente del término central.

b) [12 ptos] el valor de n para el cual el coeficiente del tercer término excede al coeficiente del segundo término en 44 unidades. Luego, para este valor de n , encuentre el término independiente de x en el desarrollo del binomio.

3) [20 ptos] Demuestre, usando inducción que $\sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ se cumple para todo valor de n en los naturales.

Pauta :

$$1) \ a) \sum_{k=2}^{100} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} + \left(\frac{1}{2} \right)^k \right) = \underbrace{\sum_{k=2}^{100} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} \right)}_{\text{Suma telescópica}} + \underbrace{\sum_{k=2}^{100} \left(\frac{1}{2} \right)^k}_{\text{Suma P.G.}} \quad (2+1 \text{ pts})$$

.....
Aplicando la propiedad telescópica y la suma de una progresión geométrica obtenemos:

$$\blacksquare \sum_{k=2}^{100} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} \right) - a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{101}{102} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} - \frac{101}{102} \quad (3 \text{ pts})$$

$$\blacksquare \sum_{k=2}^{100} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{2} \right)^k - a_1 = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{101}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{101} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{101} \quad (3 \text{ pts})$$

.....
Finalmente

$$\sum_{k=2}^{100} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} + \left(\frac{1}{2} \right)^k \right) = \frac{2}{3} - \frac{101}{102} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{101} = \frac{3}{17} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{101} \quad (1 \text{ pto})$$

.....
b) Supongamos que los números en **P.A** son:

$$x - d, x, x + d \quad (2 \text{ pts})$$

.....
donde $(x - d) + x + (x + d) = 24$, o sea $x = 8$ y los números en **P.A** quedan:

$$8 - d, 8, 8 + d \quad (2 \text{ pts})$$

.....
Ahora imponiendo las condiciones $7 - d, 6, 8 + d$ están en **P.G**, de donde

$$\frac{6}{7-d} = \frac{8+d}{6} \iff d^2 + d - 20 = 0 \implies d = 4 \vee d = -5 \quad (4 \text{ pts})$$

.....
Los números originales en **P.A** son: 13, 8, 3 cuando $d = -5$ o 4, 8, 12 cuando $d = 4$.

(2 pts)

$$2) \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^{3/2})^{n-k} \cdot (x^{-4})^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\frac{3}{2}n - \frac{11}{2}k}. \quad (5 \text{ pts})$$

a) Si $n = 12$, el término central está dado por T_7 , donde $k = 6$. (1 pto)

$$T_7 = \binom{12}{6} x^{\frac{3}{2} \cdot 12 - \frac{11}{2} \cdot 6} = \binom{12}{6} x^{-15}$$

Luego, el coeficiente para T_7 es $\binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 924$ (2 pts)

b) Note que, el coeficiente 3° término es $\binom{n}{2}$ y del 2° término es $\binom{n}{1}$. Luego (2 pts)

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 44 \iff \frac{n^2 - n}{2} = n + 44 \iff n^2 - 3n - 88 = 0 \implies n = 11 \vee n = -8$$

(5 pts)

Como $n \in \mathbb{N} \implies n = 11$. Luego

$$\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} x^{\frac{33}{2} - \frac{11}{2}k}$$

El término independiente de x es $\binom{11}{k}$ donde k es tal que $\frac{33}{2} - \frac{11}{2}k = 0 \implies k = 3$. Es decir: $\binom{11}{3} = 165$. (5 pts)

3) Sea $P(n) : \sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2, \forall n \in \mathbb{N}$

■ Para $n = 1$, tenemos $\sum_{k=1}^1 k \cdot 2^k = 1 \cdot 2^1 = 2$ y $(1-1)2^{1+1} + 2 = 2$. Es decir $P(1)$ se cumple. (2 pts)

■ Para $n = k$, supongamos que $P(k)$ se cumple para k , es decir

$$P(k) : \sum_{i=1}^k i \cdot 2^i = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 \text{ (Hipótesis de inducción)}$$

(2 pts)

- Para $n = k + 1$, Probemos que se cumple $P(k + 1)$, es decir

$$P(k + 1) : \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot 2^i = k \cdot 2^{k+2} + 2 \text{ (Tesis de inducción)}$$

(3 pts)

.....
demonstración: Basta con utilizar propiedades de la suma, es decir:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot 2^i = \sum_{i=1}^k i \cdot 2^i + (k + 1) \cdot 2^{k+1} \quad (5\text{pts})$$

$$= (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2 + (k + 1) \cdot 2^{k+1} \quad (3\text{pts})$$

$$= 2^{k+1}(2k) + 2 \quad (2\text{pts})$$

$$= k2^{k+2} + 2 \quad (2\text{pts})$$

.....
 Por lo tanto $P(n) : \sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$ (1 pto)
